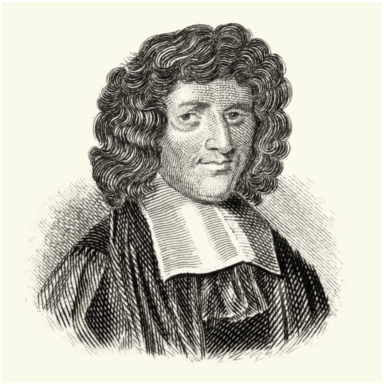




Grandi teoremi della matematica

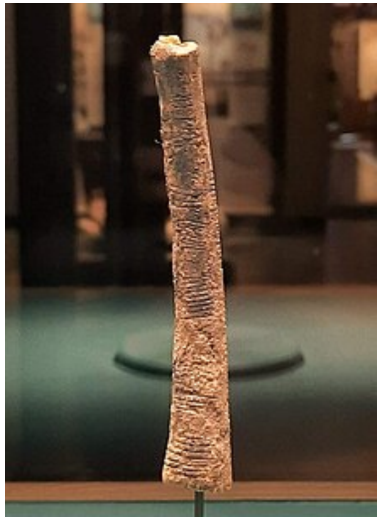
Associazione Culturale L'ALVEARE E.T.S.

LICEO SCIENTIFICO TRADIZIONALE

ISTRUZIONI PER L'USO

Piano estate 2024/2025 - Peer Education 2

Liceo Scientifico «G. Rummo»



L'**osso d'Ishango** è un reperto in osso datato al Paleolitico superiore e precisamente tra il 20.000 a.C. e il 18.000 a.C. Si tratta del perone di un babbuino.
Il reperto si trova presso il Museo di scienze di Bruxelles.

Definizione XI, libro VII – Elementi:

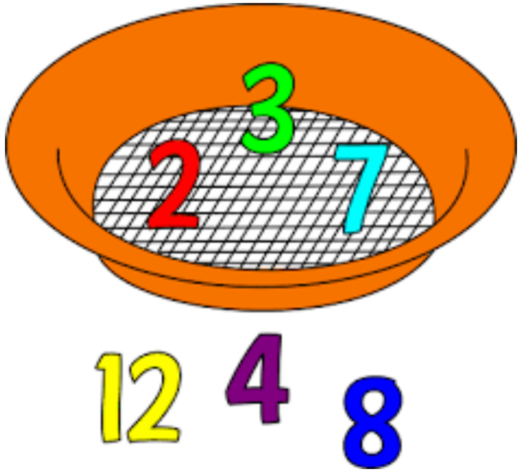
Numero primo è quello che è misurato (cioè diviso) soltanto dall’unità.

Definizione moderna:

Un numero naturale è primo quando ha soltanto 2 divisori

2,3,5,7,11,13,17,19,23, …

La lista dei numeri primi minori o uguali a n



Eratostene di Cirene, 276 a.C.

Prop. 30, libro VII. Lemma di Euclide: Se un numero primo *p* divide un prodotto *ab*, allora o divide *a* oppure divide *b*

Se n è un numero naturale se non esiste alcun numero primo p minore o uguale a $\sqrt{n}$ che divide n, allora n è un numero primo.

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47			
		53						59	
61						67			
71		73						79	
		83						89	
						97			

- Tra 1 e 100 vi sono 25 numeri primi
- Tra $n!+1$ e $n!+n+1$ non vi sono numeri primi!

TEOREMA DEI NUMERI PRIMI

Tra 1 e n vi sono «quasi» $\frac{n}{\ln(n)}$ numeri primi

Quanti sono i numeri primi?

$$2 + 1 = 3$$
$$2 \cdot 3 + 1 = 7$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031$$
$$= 59 \cdot 509$$

Proposizione 20, libro IX degli Elementi:

«I numeri primi sono più di una qualsiasi assegnata moltitudine di numeri primi»

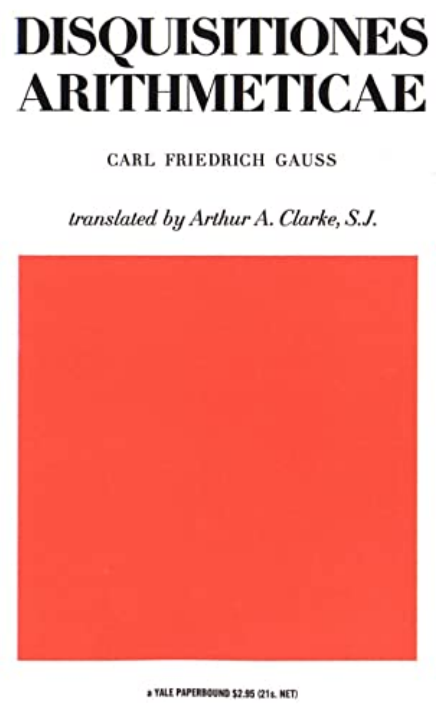
«La *reductio ad absurdum*, tanto amata da Euclide, è una delle più belle armi di un matematico. È un gambetto molto più raffinato di qualsiasi gambetto degli scacchi: un giocatore di scacchi può offrire in sacrificio un pedone o anche qualche altro pezzo, ma il matematico offre la partita» G. Hardy

$\overline{1_4} = \{1,5,9,13,17,21,25, \dots\}$

è chiuso rispetto alla moltiplicazione:

$5, 9, 13, 17, 21$ sono primi, mentre
$25 = 5 \times 5$ è composto

$9 \times 77 = 21 \times 33 = 693$



Proposizione 30, Libro VII:
Se un numero primo divide un prodotto di due numeri, allora divide uno di essi.

Proposizione 31, Libro VII:
Ogni numero composto ha per divisore un numero primo

Il teorema fondamentale dell'aritmetica
Ogni numero naturale maggiore di 1 o è un numero primo o si può esprimere come prodotto di potenze di numeri primi in un <u>unico</u> modo.

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \cdots \cdot p_t^{k_t}$$

$$\mathrm{d(n)} = (k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \cdots \cdot (k_t + 1)$$

$$1 < d_1 < d_2 < \cdots < n \to d_1 \text{ è } primo$$

Quanti divisori ha un numero e qual è la lista dei suoi divisori?

Dimostrazione di Hermite del teorema di infinità dei numeri primi

Teorema di Wilson: Dato $n > 1$ naturale, esso è un numero primo se e solo se n divide $(n-1)! + 1$

Questo teorema fu scoperto per la prima volta da Ibn al-Haytham (conosciuto anche come **Alhazen**) intorno all'anno mille

I numeri primi del tipo $2^p - 1$ con p numero primo si chiamano primi di Mersenne.

Marin Mersenne
(Oizé, 8 settembre 1588 – Parigi, 1° settembre 1648)

Il **maggior numero primo conosciuto**, a ottobre 2024, è $2^{136\,279\,841} - 1$, un numero che se scritto in base 10 è composto da 41 024 320 cifre. Tale numero è stato scoperto a ottobre 2024 da Luke Durant nell'ambito del progetto Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS). È il 52° primo di Mersenne scoperto.

Piccolo teorema di Fermat:
Se p è primo e $MCD(a, p) = 1$, allora p divide $a^{p-1} - 1$

Generalizzazione: p primo, p divide $a^p - a$ per ogni intero a

I numeri di **Fermat** sono numeri della forma $2^{2^n} + 1$.
I primi quattro numeri di Fermat sono numeri primi, ma Eulero provò che il quinto è composto, precisamente $2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$
La congettura di Fermat afferma che esiste un numero finito di primi di Fermat.

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_t^{k_t}$$

$$s(n) = \left(1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{k_1}\right) \cdot \left(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{k_2}\right) \cdot \dots$$

$$s(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_t^{k_t+1} - 1}{p_t - 1}$$

- Se $s(n) = 2n$, il numero n è detto PERFETTO
- Se $s(n) < 2n$, il numero n è detto DEFICIENTE
- Se $s(n) > 2n$, il numero n è detto ABBONDANTE

Libro VII, definizione XXII. Numero perfetto è quello che è uguale alla somma delle proprie parti.

Libro IX, proposizione 36.
Se $2^n - 1$ è primo, allora $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ è un numero perfetto.

Il grande Eulero, in un lavoro postumo del 1846, dimostrò che tutti i numeri perfetti pari sono nella forma di Euclide