Il principio di Pascal e i "Galleggianti" di Archimede

Un’analisi storico-critica

Alessandro Cesta

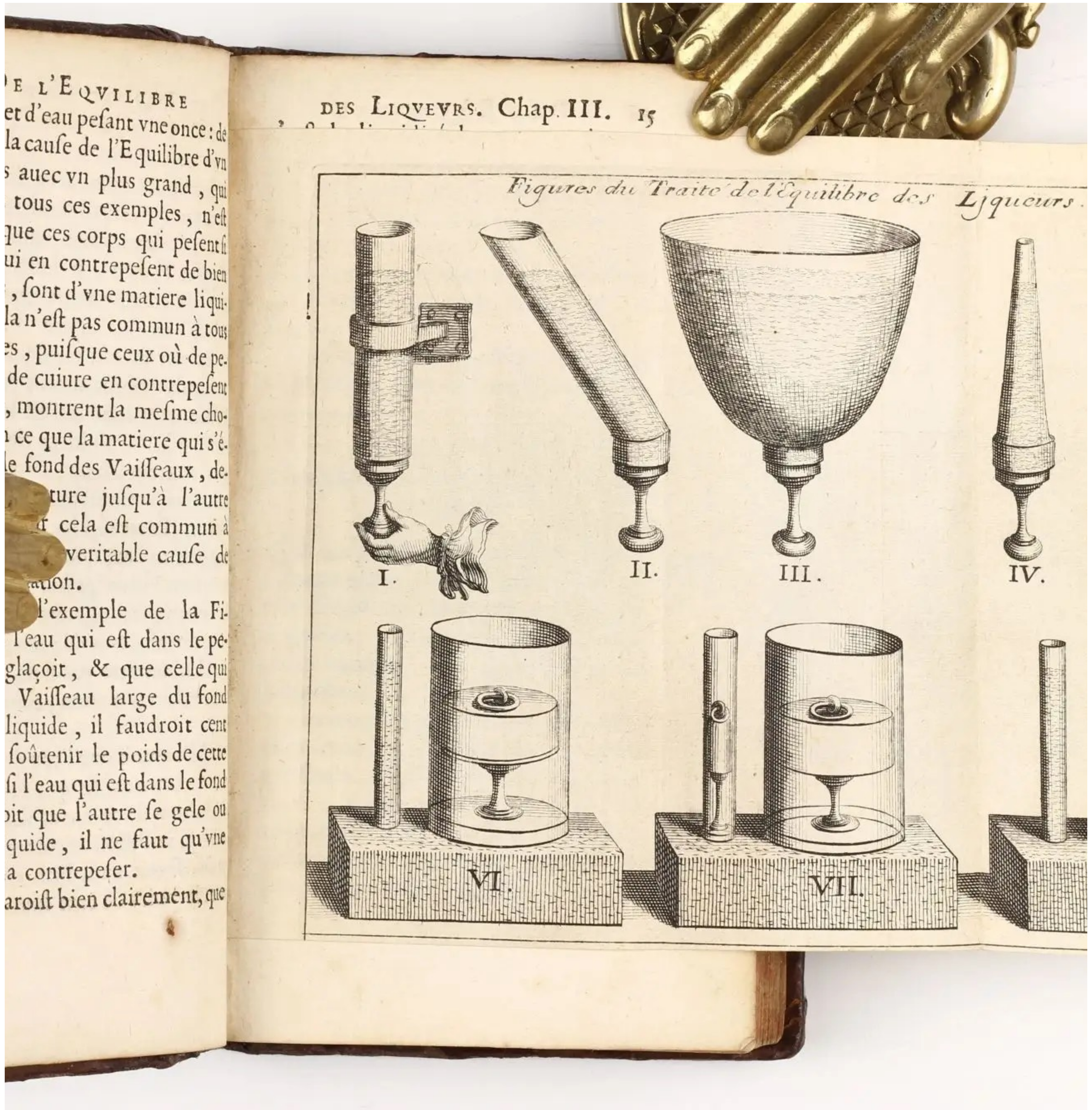
Una questione di idrostatica

L’ambito del Principio di Pascal è quello dell’idrostatica o statica dei fluidi

"Un fluido è in condizioni "statiche" nel momento in cui, non è sottoposto a variazioni o movimenti evidenti"

Un fluido, dato il suo carattere macroscopico, sarà pensato come un "mezzo continuo"

La statica dei fluidi interesserà anche l’equilibrio meccanico dei corpi in essi immersi, esplicandosi in ciò, nel suo contesto eminentemente "pratico"



Un po' di storia dell'idrostatica

È molto probabile che le esperienze di equilibrio dei fluidi e dei corpi immersi nei fluidi siano molto antiche

Come sempre l'esperienza pratica ha preceduto l'esperienza teoretica, quest'ultima essendo un affinamento di tecniche tramandate di generazione in generazione

Si pensi alla scoperta e successiva perfezione della possibilità di navigare, l'equilibrio di un natante e la forma d'equilibrio di una barca era conosciuta ben prima dei "Galleggianti" di Archimede

Un po' di storia dell'idrostatica

L'idrostatica scientifica nasce con Archimede (287 a.C - 212 a.C.) con la sua opera "I Galleggianti"

Sebbene ci siano alcuni precursori che trattarono l'idrostatica come Democrito (460 a.C - 370 a.C.) e Stratone di Lampsaco (335 a.C. - 274 a.C.), lo stesso Aristotele (384 a.C. - 322 a.C.), in modo parziale ed impreciso, se ne occupò

Un po' di storia dell'idrostatica

Dopo moltissimi secoli da Archimede, i primi significativi contributi alla statica dei fluidi furono dati da Giovanni Battista Benedetti (1530-1590), che studiando il moto dei fluidi nelle tubature delle fontane e l'utilizzo di pompe idrauliche, arrivò quasi a definire il principio della leva idraulica

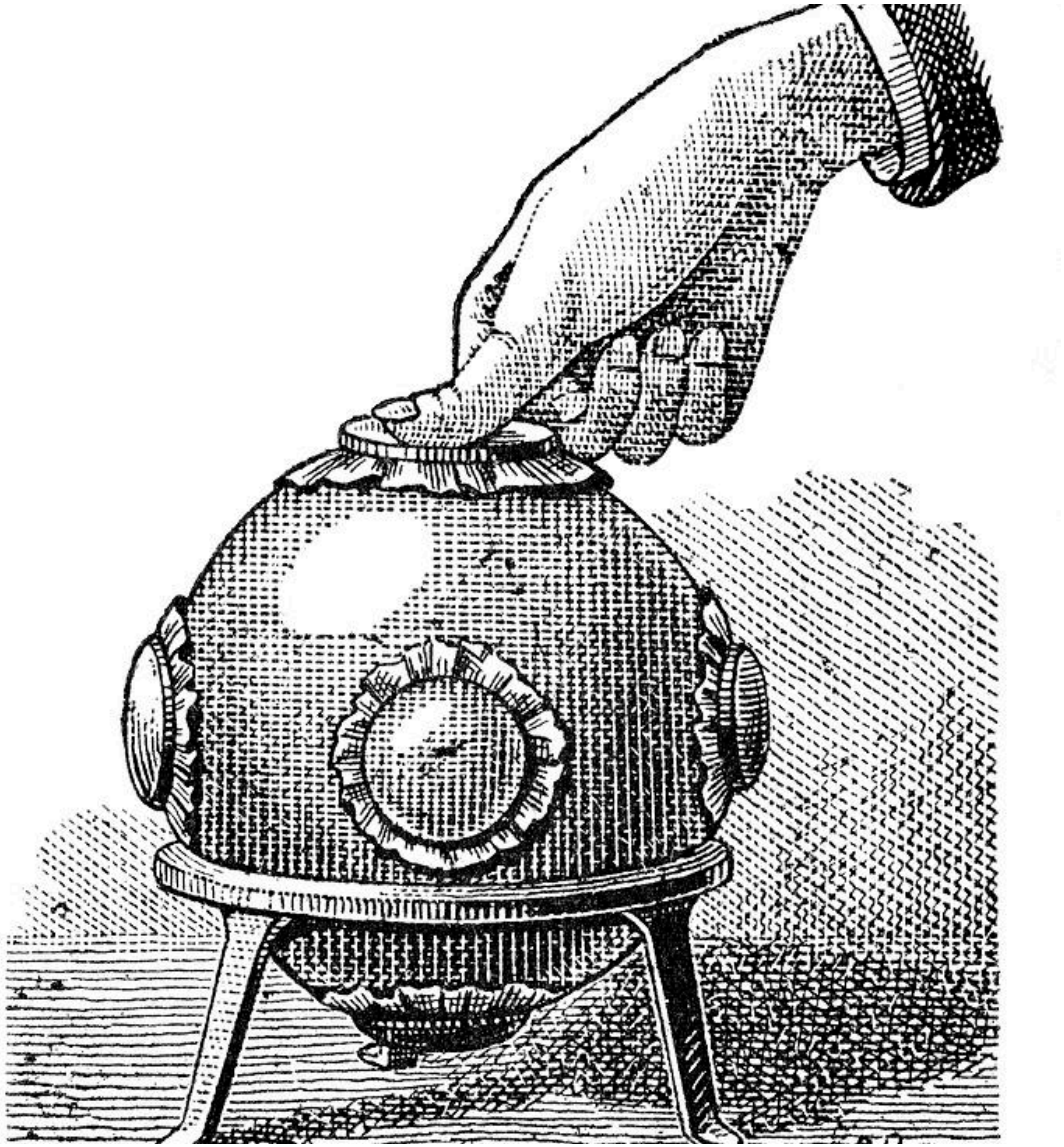
Successivamente fu Simon Stevin (1548-1620) a studiare i fluidi e a fornire in modo corretto e rigoroso il concetto moderno di pressione, dimostrò come la pressione dipendesse dalla profondità in un fluido, mostrò quello che poi divenne "il paradosso idrostatico", cioè che la pressione sul fondo di un fluido dipendeva solo dal peso della colonna di fluido e non dalla forma del contenitore

Stevin usò nelle sue deduzioni teoretiche il concetto di masse d'acqua "solidificate", ipotizzando che in un liquido in equilibrio tali masse non lo disturbavano

Il compito di Stevin fu quello di riscoprire molti dei teoremi di idrostatica di Archimede e delle sue idee, di "preparare il campo" a Pascal, suo allievo ideale

Blaise Pascal e "les liqueurs"

Blaise Pascal (1623-1662), come vedremo, trattò in modo diffuso dei liquidi e dei gas, principalmente i suoi risultati sono riprodotti nell’opera postuma del 1663 intitolata "Traitez de l’equilibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l’air"



Il principio

In un liquido in equilibrio all’interno del quale non agisce alcuna forza, e supposto non soggetto a gravità, qualsiasi elemento di superficie di dimensioni date, comunque orientato è soggetto alla medesima pressione: quest’ultima è indipendente dalla direzione e uniforme in ogni punto!

Mach, E. "La meccanica nel suo sviluppo storico-critico"

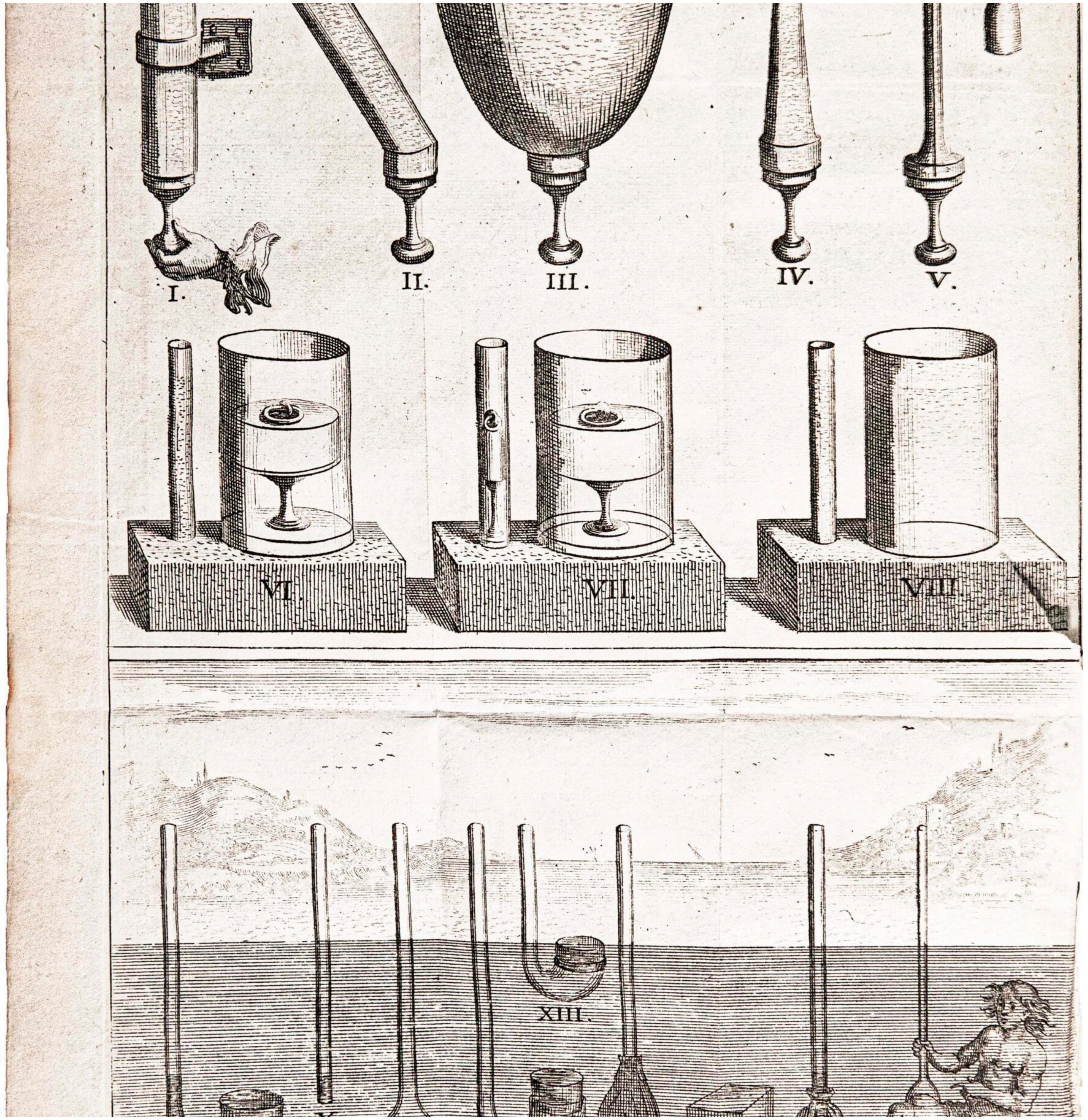
Il principio

Ci sia un recipiente munito di un pistone a sezione unitaria ***A*** con al suo interno un liquido, manteniamo immobile un altro pistone ***B***; se carichiamo il pistone ***A*** di un peso ***P*** allora in tutti i punti del recipiente ci sarà la medesima pressione ***p***. Se rendiamo mobile il pistone ***B*** di sezione ***b*** vedremo che sarà necessaria la forza ***bp*** per tenerlo in equilibrio

sehen) überall im Gefässe derselbe Druck p.
Stempel dringt so weit ein, und
Gefässwände werden so weit deform
dass sich die Elasticitätskräfte
starren und flüssigen Körper übe
das Gleichgewicht halten. Denkt m
sich nun den Stempel B von d
Querschnitte f beweglich, so kann
der Druck $f \cdot p$ ihn im Gleichgewi
erhalten.

Fig. 65.

Wenn Pascal den erwähnten S
aus dem Princip der virtuellen V
schiebungen ableitet, so ist zu bemerken, dass das
ihm erkannte Verschiebungsverhältniss nur durch
leichte Verschiebbarkeit der Theile und durch
Gleichheit des Druckes in allen Theilen der Flüssigk
bedingt ist. Könnte in einem Flüssigkeitstheil e
stärkere Compression eintreten als in einem andern,
wäre das Verschiebungsverhältniss gestört und die P
cal'sche Ableitung nicht mehr zulässig. Wir könn
um die Eigenschaft der Druckgleichheit als einer
gebenen nicht herumkommen. wie wir auch erkenn

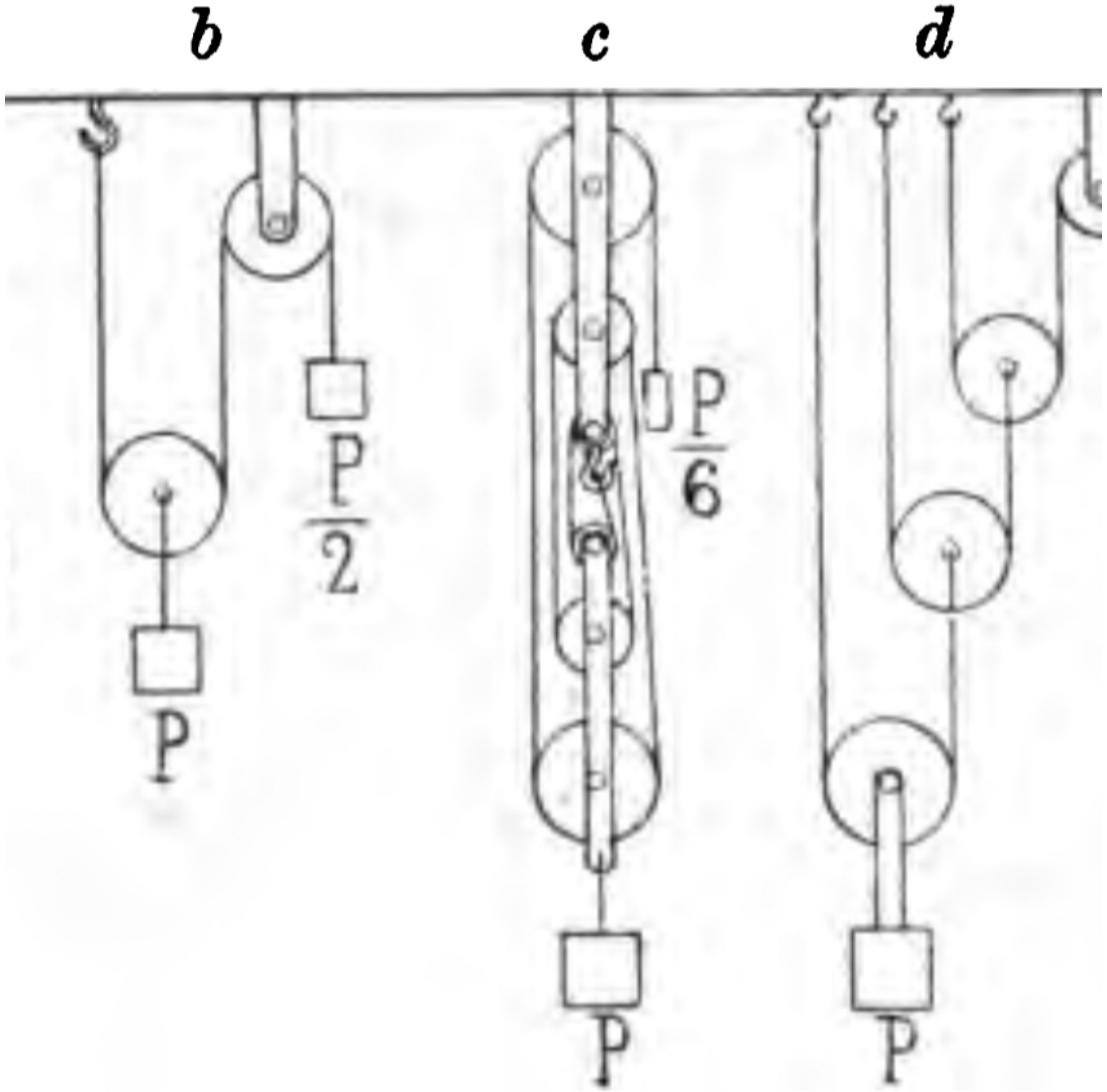


Il principio e i "lavori virtuali"

Pascal sviluppò il suo principio discutendo un esperimento che non è difficile riconoscere essere "in nuce" una anticipazione della pressa o leva idraulica

Egli fece astrazione dal liquido nella sua totalità considerando per l'appunto solo la pressione alla superficie

Impiegò il principio riconosciuto col nome dei "lavori virtuali" o "spostamenti virtuali", dati in statica antica dal prodotto costante dei pesi per le altezze raggiunte dai "centri di gravità" dei corpi interessati



Il principio e i "lavori virtuali"

Si pensi alle seguenti macchine di Atwood con pulegge. Per stabilire le condizioni di equilibrio non solo si adopereranno contrappesi all'estremità libera tali da essere sottomultipli del peso ***P*** da sostenere, si potrà osservare come l'altezza all'equilibrio presenterà un andamento reciproco tale da rendere costante il prodotto ***Ph***.

In tal senso, in modo non del tutto rigoroso, si può parlare di "spostamenti virtuali"

Il principio e i "lavori virtuali"

Si considerino due vasi comunicanti a diversa sezione, siano chiusi da pistoni tali da avere un peso proporzionale alle sezioni. In tal caso si avrà equilibrio, infatti, data l’invariabilità del volume del liquido, gli spostamenti dei pistoni sono inversamente proporzionali ai pesi che sopportano (principio dei "lavori virtuali"): da ciò si deduce che la pressione ***p*** si trasmette nel fluido in modo uniforme in tutti i suoi punti!

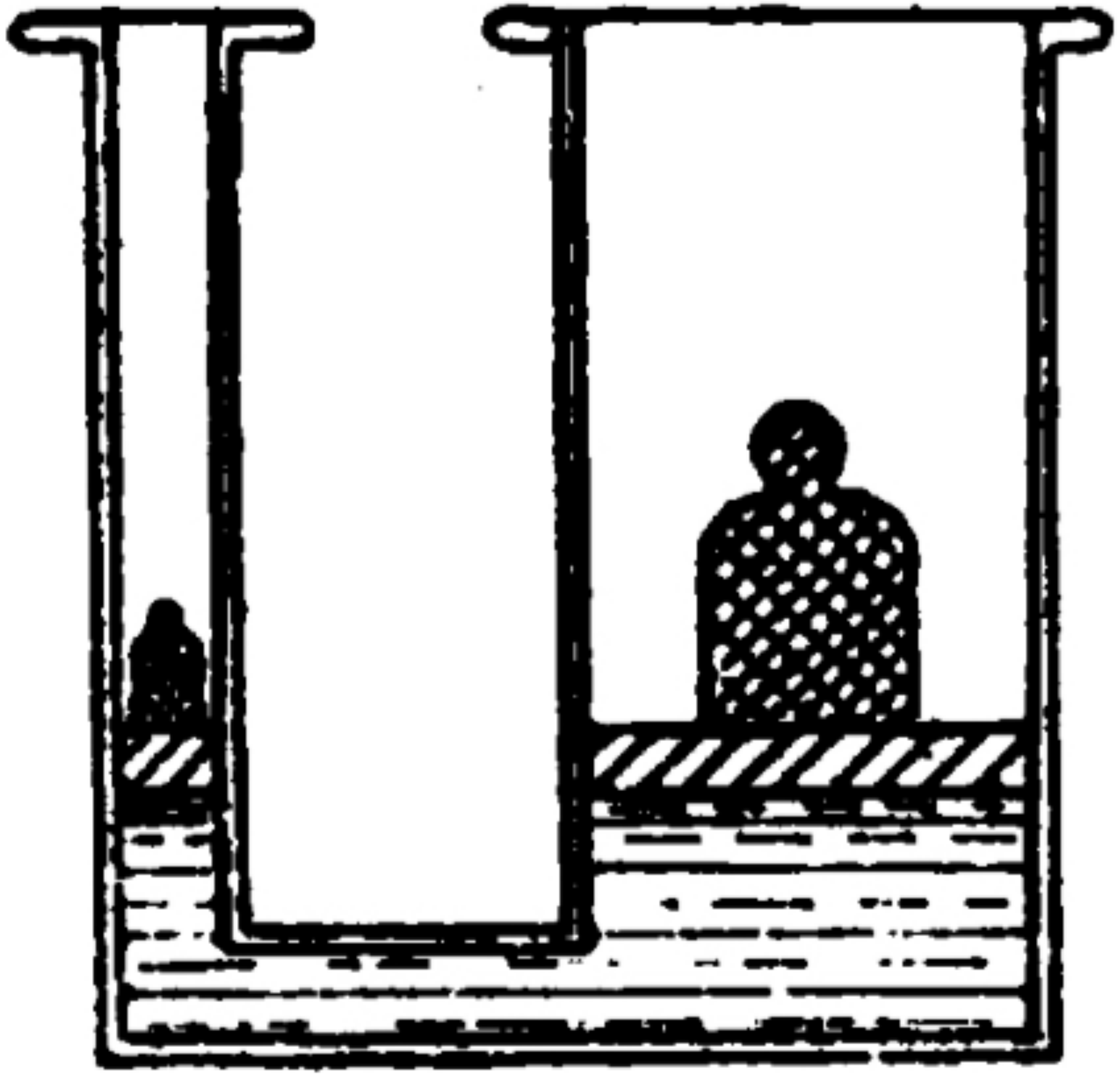
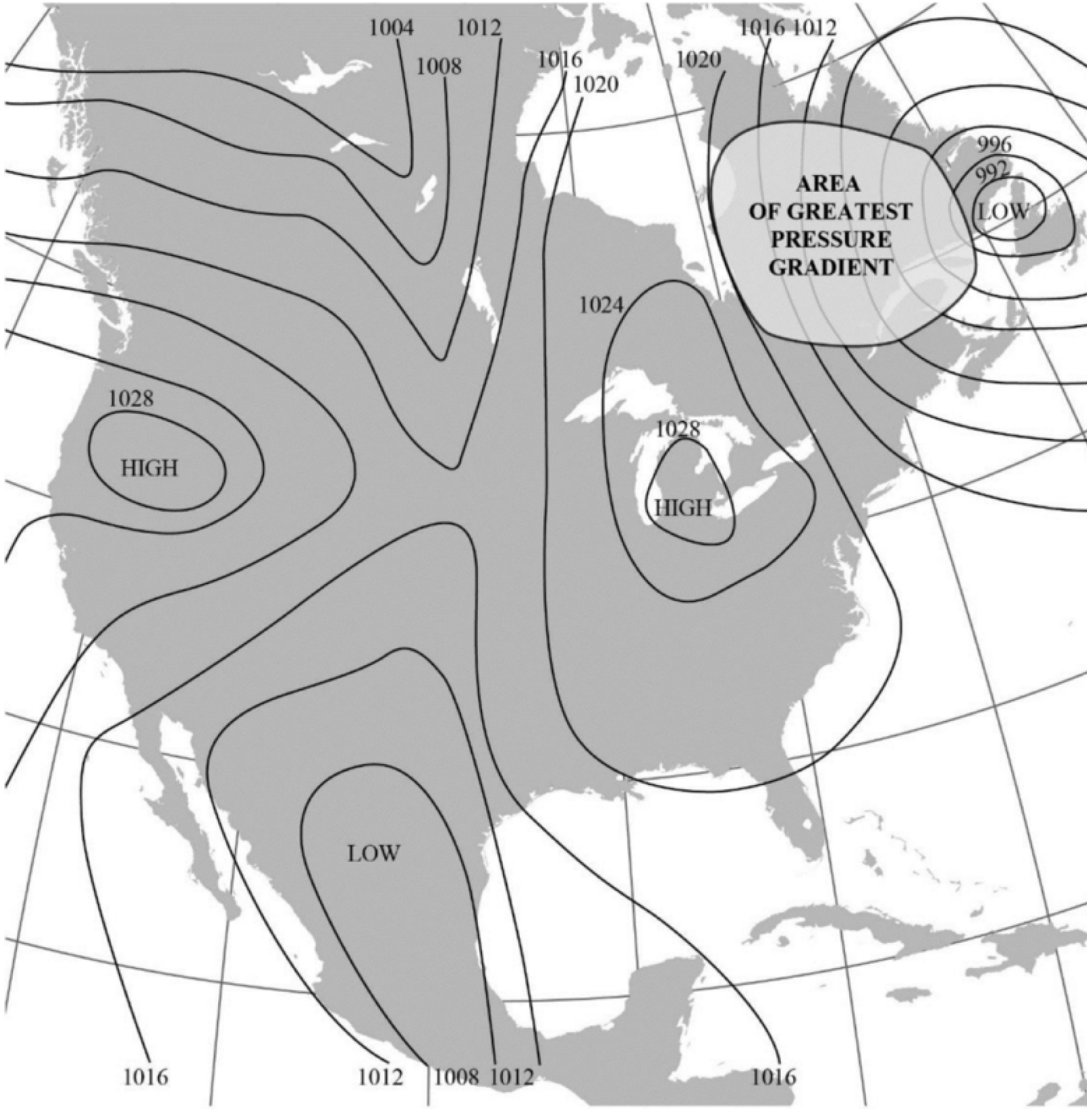


Fig. 62.



"Matematica" e principio

Si può intendere la pressione ***p*** come una funzione della posizione, se siamo nello spazio si avrà ***p(x,y,z)***. Siamo interessati a descrivere come questa pressione "dipende dai suoi parametri", cioè dalle coordinate del generico volume, piccolo a piacere, di fluido ***ΔV***; chiameremo la variazione dei parametri delle coordinate della pressione ***p*** come "gradiente" di ***p*** oppure, in termini abbreviati

$$\vec{\mathbf{gradp}}$$

Allora il principio di Pascal ci dirà semplicemente che

$$\vec{\mathbf{gradp}} = 0$$

"Matematica" e principio

Se si ha un fluido a riposo in un campo gravitazionale uniforme, si può dire che

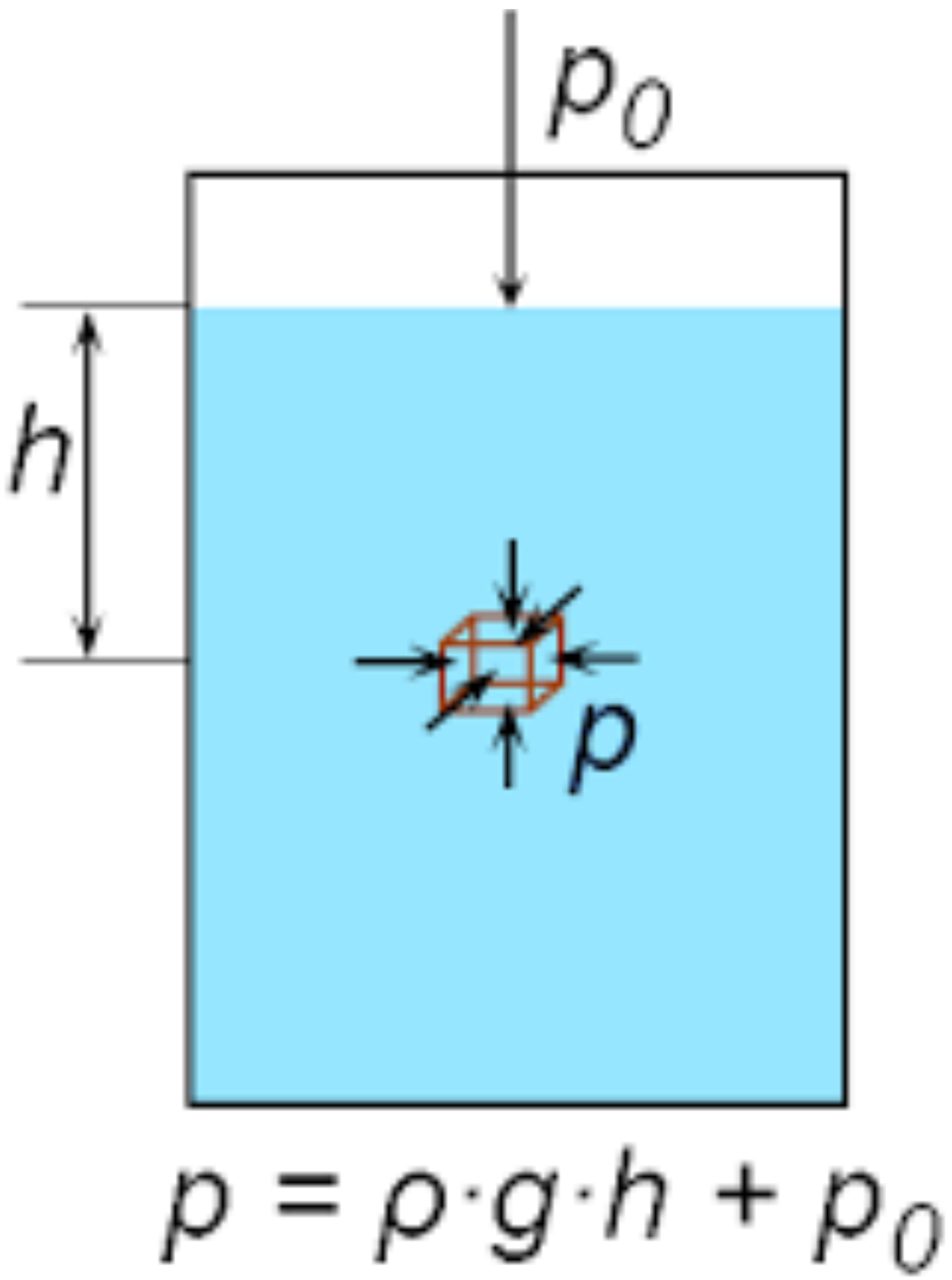
$$\vec{\mathbf{grad}}\mathbf{p} = \rho\vec{\mathbf{g}}$$

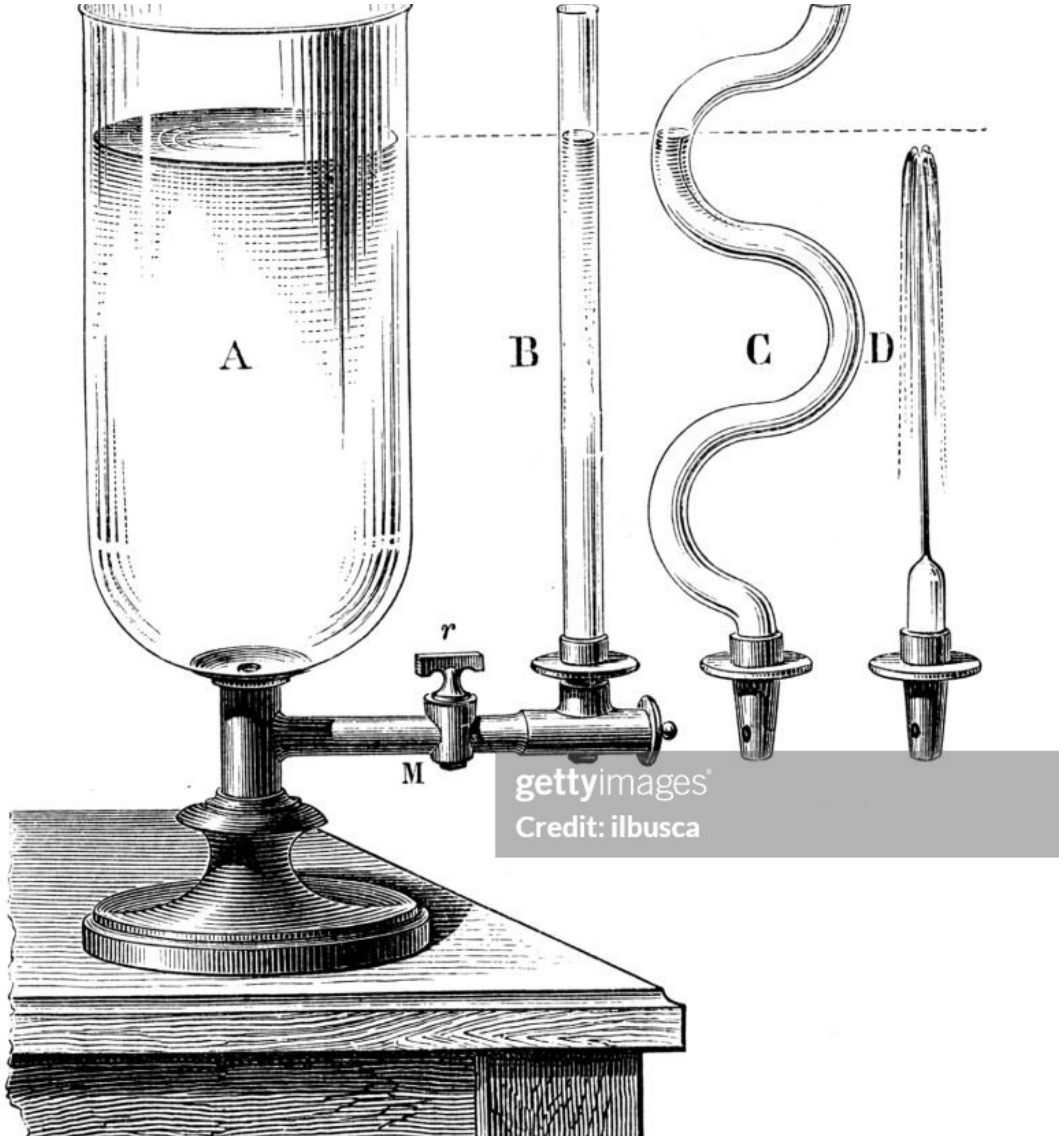
cioè la variazione della pressione dipenderà, punto per punto, dalla densità del fluido e dalla accelerazione di gravità, da ciò la legge di Stevin

Infatti, se $\vec{\mathbf{g}}$ agisce lungo una unica direzione ***z*** si può far notare come la pressione all'interno di un fluido sia data da

$$\mathbf{p} = -\rho\mathbf{gz}$$

Riunendo il principio di Pascal e la legge di Stevin, si arriva a dimostrare quella che oggi è conosciuta come la legge di Archimede, eppure noi siamo interessati ad una formulazione particolare di un postulato archimedeo a nostro avviso molto più importante, da qui la nostra ricerca storico-critica





I vasi comunicanti

La dimostrazione di Pascal fu un’applicazione del principio degli "spostamenti virtuali" ad un fenomeno già conosciuto dall’antichità, quello dei vasi comunicanti

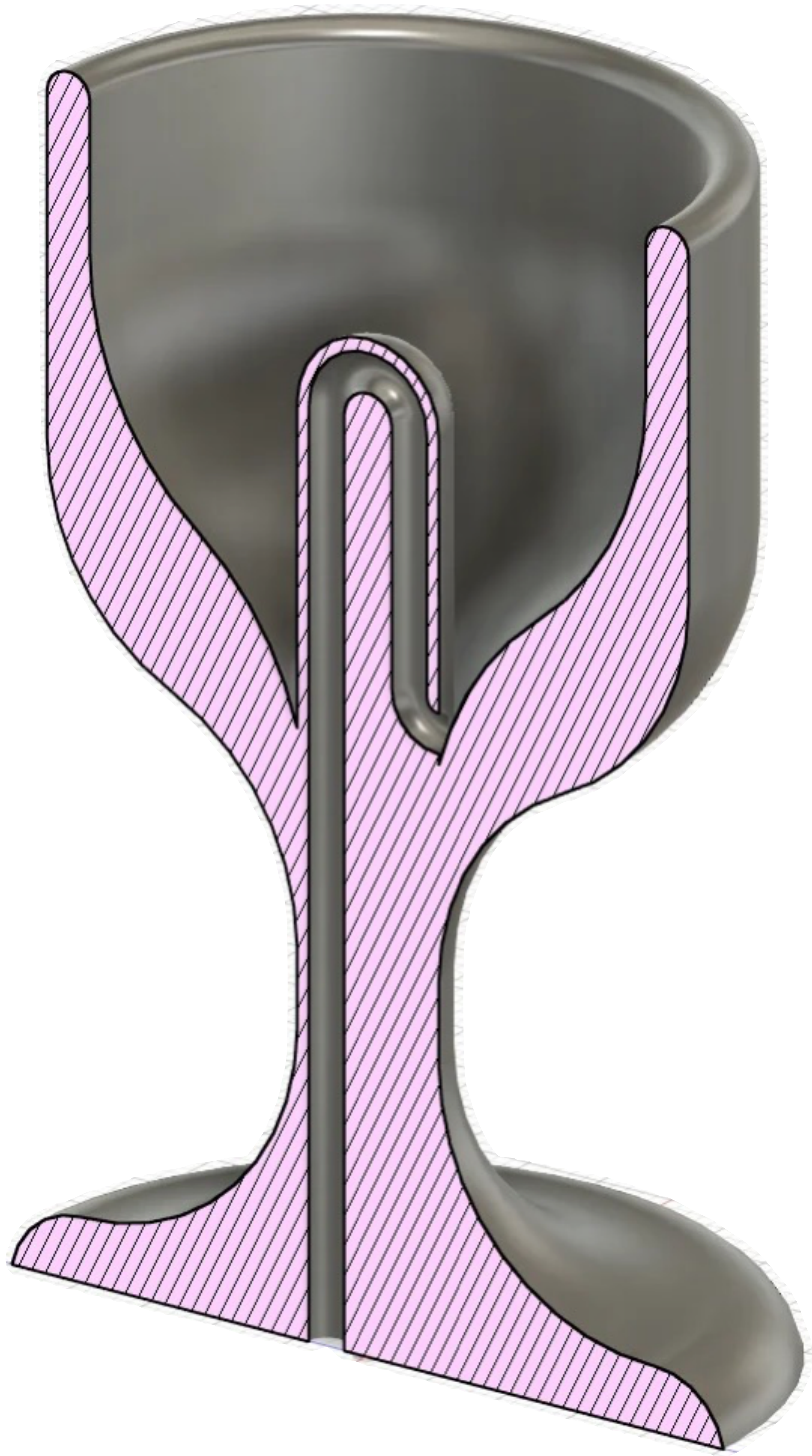
Fu descritto da Erone (I secolo - …) negli ***Pneumata*** e nei ***Dioptra***, ne parla in modo ingenuo e goffo Platone (428 a.C - 348 a.C.) nel ***Simposio***

Lo stesso Galileo (1564-1642) cerco di applicare gli "spostamenti virtuali" ai vasi comunicanti, ma ci riuscì in modo poco elegante e non colse quello che poi fu detto per l’appunto principio di Pascal

I vasi comunicanti

Riprendiamo l'equazione $\mathbf{p} = -\rho \mathbf{g} \mathbf{z}$ e ammettiamo che valga per un fluido contenuto in un contenitore aperto, allora sulla superficie libera ad altezza $\mathbf{z} = \mathbf{h}$ ci sarà una pressione esterna $\mathbf{p_0}$ tale che si potrà scrivere in modo generale $\mathbf{p} = \mathbf{p_0} + \rho \mathbf{g}(\mathbf{h} - \mathbf{z})$

Si prendano ora due vasi comunicanti, riempiti dello stesso liquido, valendo il principio di Pascal, di deve avere che la pressione è uniforme in tutto il liquido, perciò le superfici libere dei due vasi avranno la stessa altezza

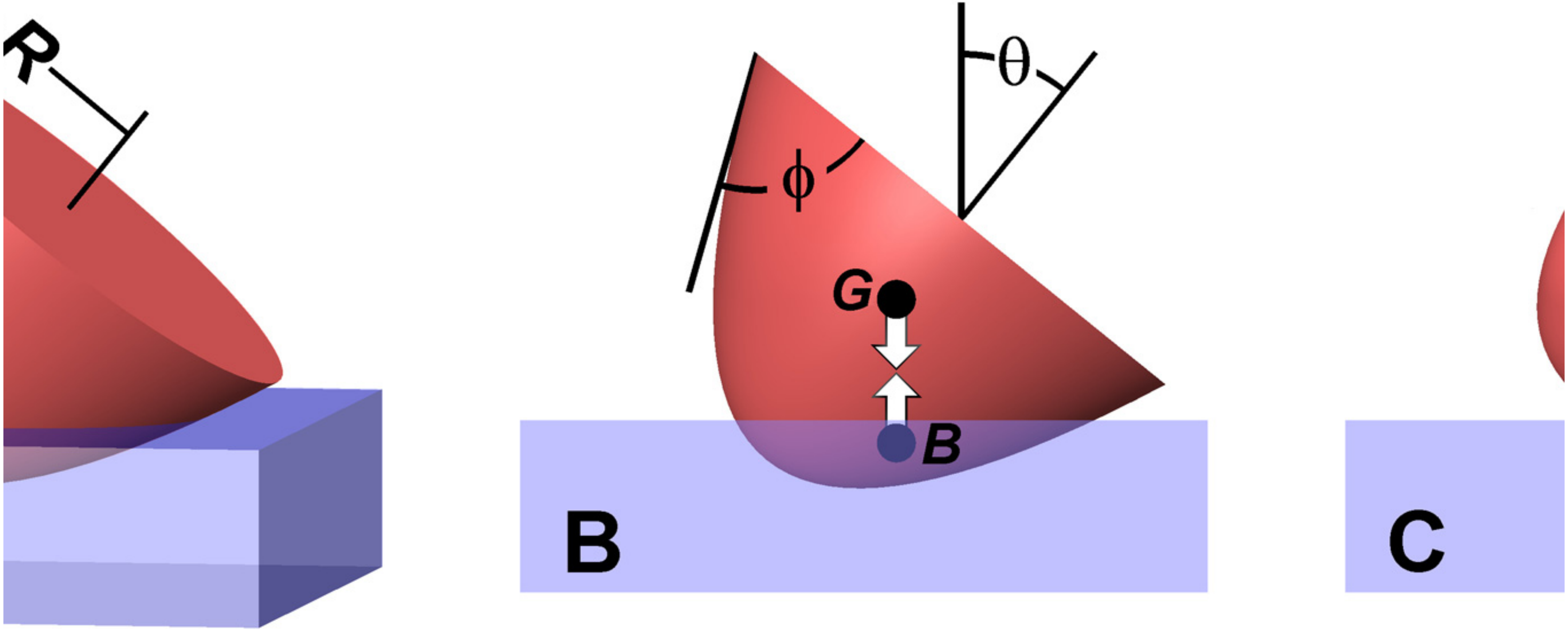


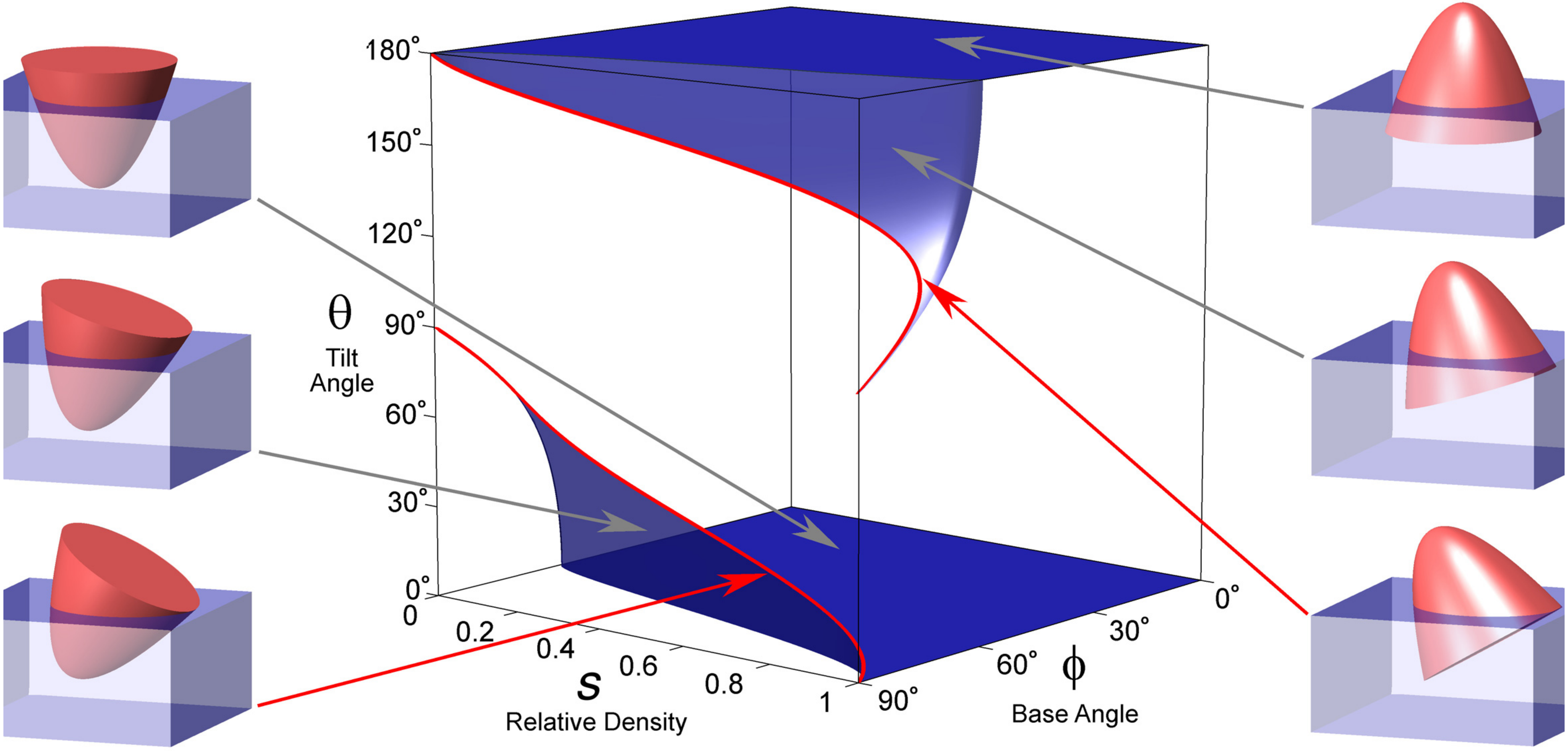
Archimede e i “Galleggianti"

È il primo trattato di idrostatica che si conosce, fu probabilmente redatto intorno al 250 a.C.

È organizzato in due sezioni, un che tratta dell’equilibrio in generale dei fluidi e dei corpi in essi immersi; l’altra si dedica trovare l’equilibrio di paraboloidi in un liquido (forma in sezione della chiglia di una nave)

Si tratta di un’opera di scienza tipicamente greca, con una forte componente geometrica delle dimostrazioni e, soprattutto, un primo postulato da cui discendono poi tutte le altre proposizioni e teoremi


R
θ
ϕ
G
B
B
C



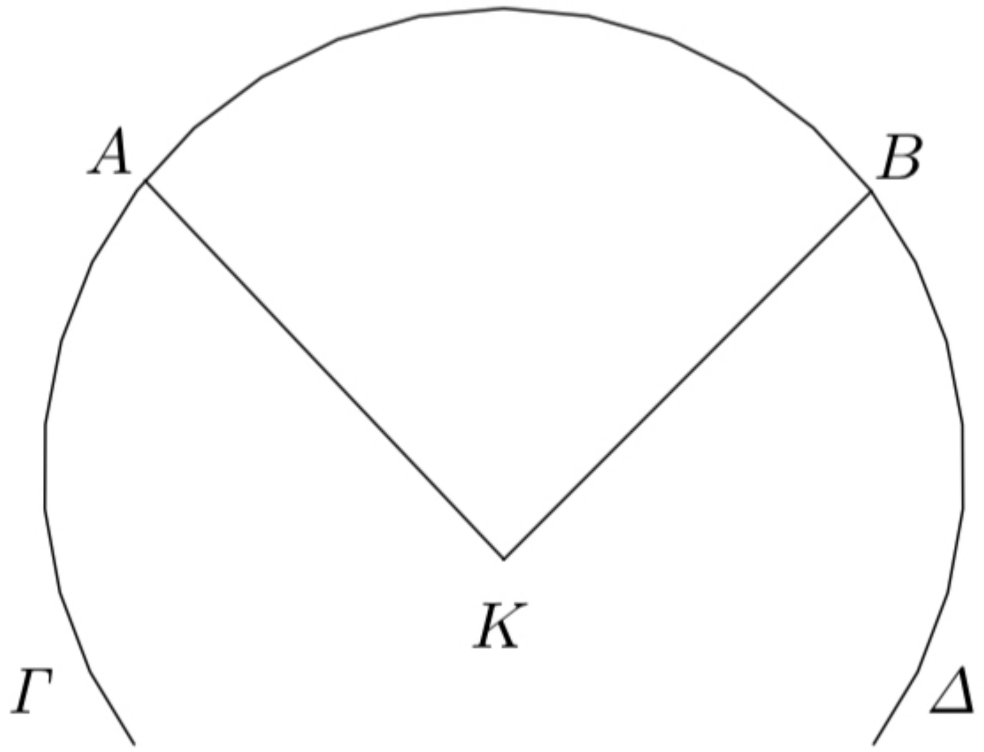
180°
150°
120°
90°
60°
30°
0°
θ
Tilt
Angle
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
S
Relative Density
0°
30°
60°
90°
ϕ
Base Angle

Il postulato iniziale "Αἴτημα"

"Sia dato un fluido di tali proprietà che delle sue porzioni contigue
ed egualmente disposte, la meno compressa sia spinta dalla più compressa e che ciascuna delle sue parti [si trovi] compressa secondo la [relativa] perpendicolare dal fluido posto sopra, a condizione che il fluido [stesso] non sia ricompreso in qualcosa e compresso da qualcos'altro"

Βίβλος α′

*⟨⟨**Αἴτημα**⟩⟩ **α′.** Ὑποκείσθω τό ὑγρὸν φύσιν ἔχον | τοιαύταν, ὥστε τῶν μερέ τῶν ἐξ ἴσου κειμένων καὶ συνε | χέων ἐόντων ἐξωθεῖσθαι τὸ ἧσσον | θλιβο τοῦ μᾶλλον θλι | βομένου, καὶ ἕκαστον δὲ τῶν μερέων | αὐτοῦ θλίβεσθαι τ αὐ | τοῦ ὑγρῷ κατὰ κάθετον ἐόντι, εἴ | κα μὴ τὸ ὑγρὸν ᾖ καθειργμένον ἐ ὑπὸ ἄλλου τινὸς θλιβόμε | νον.* [1]



*⟨⟨**Θεώρημα**⟩⟩ **α′.** Εἴ κα ᾖ ἐπιφάνε πέ | δῳ τεμνομένα διά τινος ἀεὶ τοῦ | μείου τὰν τομὰν ποιέοντι* [2] κύκλου π κέντρον ἔχ(ου)σαν τὸ σαμεῖον δι' ο πέδωι τέμνεται σφαίρας ἔσται [ἁ] ἐπι ἔστω γὰρ ἐπιφ[ά]νειά τις ἁ τεμνομένα σαμείου ἐπιπέ[δ]ωι ἀεὶ τὰν τομὰν πο κλου περιφέρειαν, κέντρον δέ αὐτᾶς οὖν μή ἐστιν αὐτὰ ἁ ἐπιφάνεια σφαί φάν[ει]α, οὐκ ἐσσοῦνται πᾶσαι αἱ ἀπ τρου ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν ποτιπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι.
ἔς[τ]ω δὴ τὰ ΑΒ σαμεῖα ἐν τῆι ἐπιφαν[εί]αι καὶ ἄνισοι αἱ ΑΚ ΚΒ, δ ΚΑ ΚΒ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω καὶ ποιείτω τὰν τομὰν ἐν τᾶι ἐπιφανείαι τ γραμὴν. κύκλου ἄρα ἐστὶν αὐτὰ, κέντρ(ον) δὲ αὐτᾶς τὸ Κ ἐπεὶ ὑπόκειτο νεια τοιαύτα. οὐκ ἔστι δὲ, ἄνισοι γὰρ αἱ ΚΑ καὶ ⟨⟨Κ⟩⟩Β. ἀναγκαῖον ο

Il postulato iniziale "Αἴτημα"

Il testo inizia ponendo a base della discussione la considerazione che due porzioni contigue di fluido (poste alla stessa altezza rispetto alla superficie del fluido) non sono in equilibrio se sulla loro compressione agiscono forze di diversa intensità, ossia se le relative colonne di fluido sovrastanti ciascuna porzione sono di diversa altezza; la misura della compressione è quindi data dall’altezza di dette colonne, a patto che il fluido non sia compreso in qualcosa e compresso da qualcos’altro

A cura di Fleck, H. F. "Archimede Sui corpi galleggianti"

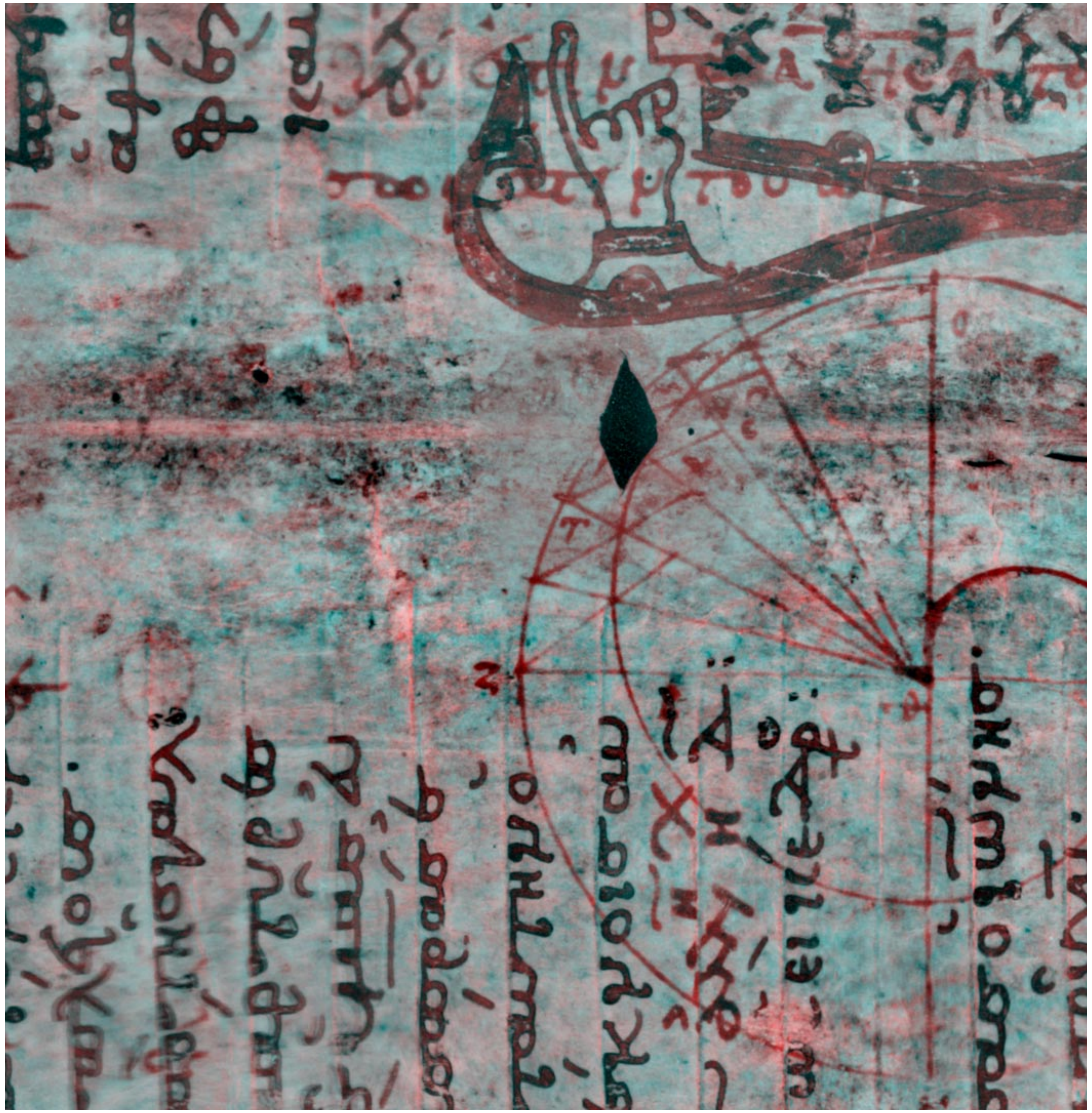
Il postulato iniziale "Αἴτημα"

Sulla scorta di Lucio Russo noi crediamo che il postulato iniziale del trattato, non solo porti a dimostrare quella che è la ormai nota legge di Archimede, ma che implichi la legge dei vasi comunicanti e che, molto probabilmente tale fenomeno ne abbia suggerito la formulazione

D’altronde abbiamo visto come sia centrale, per la dimostrazione del principio di Pascal e di Stevin questo fenomeno

Il concetto di pressione è accennato in Empedocle (… - V secolo a.C.) nella sua teoria della respirazione da quanto ci riporta Aristotele

Russo, L. "La rivoluzione dimenticata"



Su di una dimostrazione idrostatica della sfericità della Terra

⟨⟨**Θεώρημα β΄**⟩⟩. [π]α[ν]τὸς ὑγροῦ καθεσ
νητον, τὰ(ν) ἐπιφάνειαν σφαίρας ἕξει σχῆμα τ

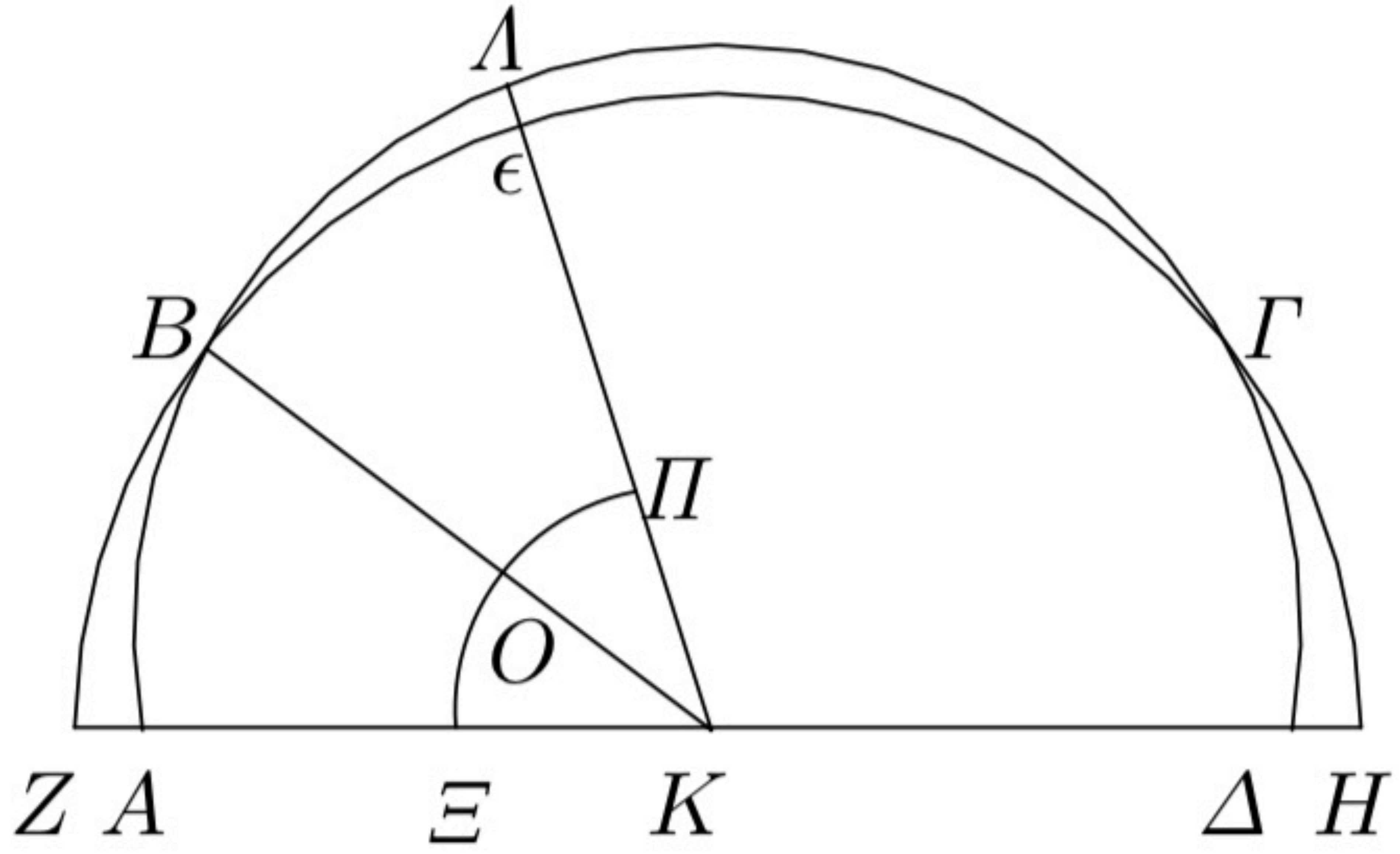
ἁ ἐπ
τρου
το K
γραμ
κύκλ
δὲ αι
ἐσσο
ABΓ
λελά
μὲν
ABΓ

λάσσων, καὶ κέντρωι μὲν τῶι K, διαστάματι
γεγράφθω· πεσεῖτ(αι) οὖν ἁ περιφέρεια τοῦ
ABΓΔ γραμμάς, τὰ δ' ἐκτός, ἐπει(δὴ) ἁ ἐκ

Durante il III secolo a.C. non solo Eratostene (276 a.C. - 274 a.C.) misurò il meridiano terrestre, ammettendo e dimostrando la sfericità della Terra, anche Archimede ne diete una dimostrazione idrostatica

Siamo al secondo teorema del trattato, dimostrato sfruttando un primo teorema puramente geometrico sulla costruzione di una sfera

Proposizione II. Ogni fluido [supposto] immoto [ed] in quiete, assumerà la forma di una sfera con centro in quello della Terra.



HS

[Supposto un fluido] in quiete, se ne tagli la superficie con un piano passante per K, centro della Terra, [e] sia la curva $AB\Gamma\Delta$ la sezione della superficie. Affermo allora che la curva $AB\Gamma\Delta$ appartiene alla circonferenza di centro K. Diversamente non sarebbero eguali le rette da K alla curva $AB\Gamma\Delta$.

Si consideri dunque una certa linea retta [KB] maggiore di alcune [delle linee] condotte da K sulla linea $AB\Gamma\Delta$ e minore di altre, e dal centro in K, prese linee distanziate, si descriva un cerchio; cadrà dunque una siffatta circonferenza in parte dentro in parte fuori della linea $AB\Gamma\Delta$, poiché il suo raggio è maggiore

di alcune [delle linee] che uniscono K con la linea $AB\Gamma\Delta$ e minore di altre.
Ammessa dunque $ZB[\Gamma]H$ la circonferenza descritta, si conduca una retta da B ad K e si traccino le rette ZK e $K\epsilon\Lambda$ per angoli eguali [rispetto a KB, e] si descriva nel piano e nel fluido la circonferenza $\Xi O\Pi$ di centro K: pertanto porzioni di fluido sulla circonferenza $\Xi O\Pi$ sono fra loro contigue ed egualmente disposte.
D'altra parte [le porzioni lungo] l'arco ΞO sono compresse dal fluido [posto] nella [regione] ZB, mentre quelle lungo l'arco $O\Pi$ sono compresse da quelle nella [regione] $B\epsilon$, e dunque le porzioni di fluido lungo l'arco ΞO sono compresse in maniera diversa [da quelle lungo] l'arco $O\Pi$, cosicché [porzioni] meno compresse sono spinte dalle più compresse ed il fluido non sarà in quiete. Ma [poiché] s'era supposto che [il fluido] restasse in quiete, ne consegue che la linea $AB\Gamma\Delta$ sarà la circonferenza di un cerchio con centro in K.
Ugualmente si dimostrerà che se la superficie del fluido sarà tagliata in qualunque altro modo da un piano passante per il centro della Terra, la sezione sarà una circonferenza con centro coincidente con quello della Terra. È dunque evidente che la superficie di un fluido in quiete assume la conformazione di una sfera con centro quello della Terra, poiché tagliando [la superficie] con un piano per un punto [fisso] s'ottiene come sezione la circonferenza di un cerchio, il cui centro sarà [proprio] il punto per cui passa il piano secante.

Linguaggio nuovo e antico: equilibrio idrostatico di una sfera d'acqua

Sappiamo che l'accelerazione di gravità $\vec{\mathbf{g}}$ può essere correlata ad un potenziale gravitazionale $\boldsymbol{\Phi}$, quest'ultimo essendo funzione delle sole coordinate

Si può far vedere che $\vec{\mathbf{g}} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\boldsymbol{\Phi}$, da cui la forza su di una densità di massa ρ sarà

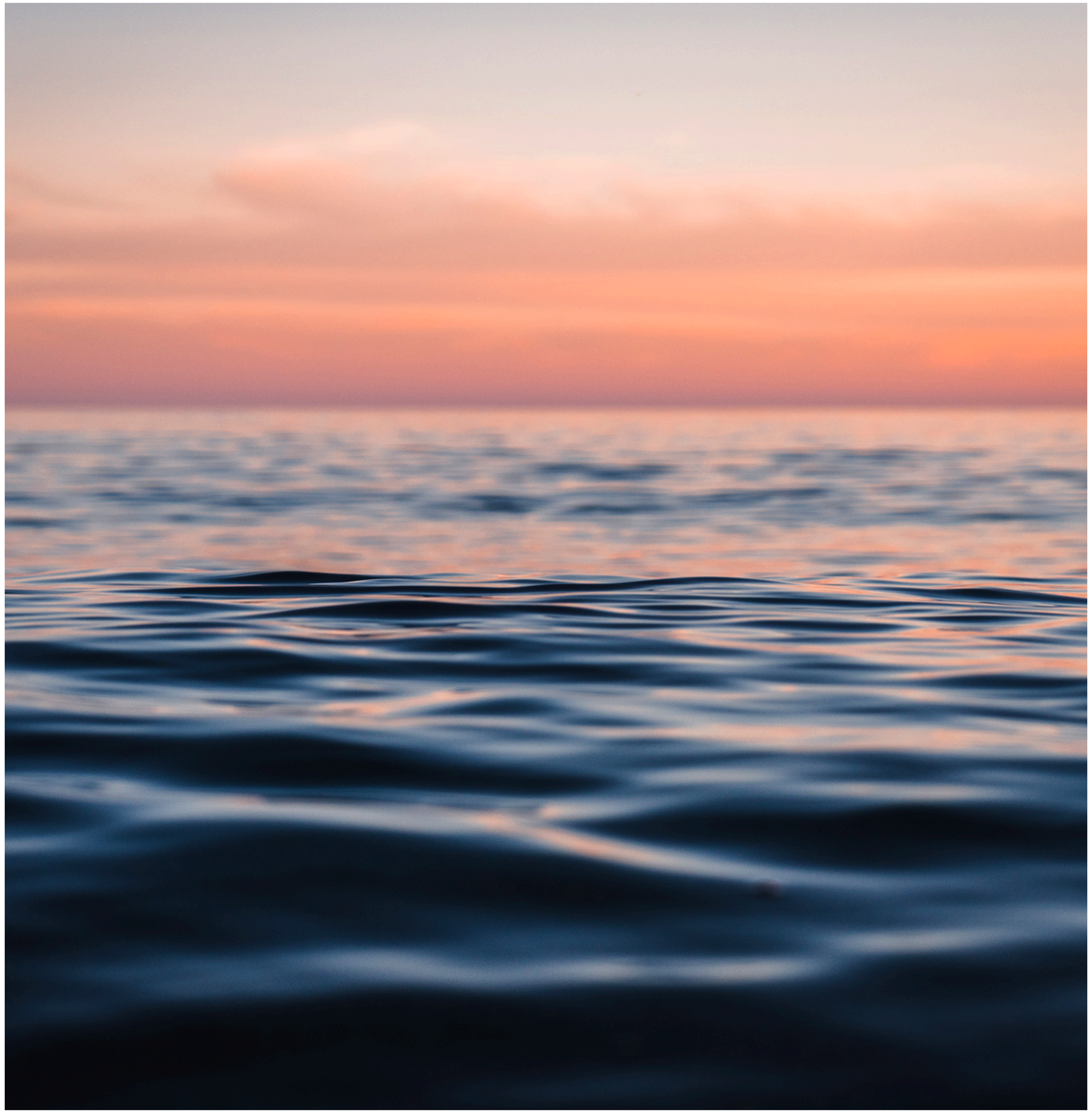
$-\rho\overrightarrow{\mathbf{grad}}\boldsymbol{\Phi}$

L'equilibrio idrostatico perciò è dato da

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}\mathbf{p} = -\rho\overrightarrow{\mathbf{grad}}\boldsymbol{\Phi}$$

Da questa equazione si nota che c'è diretta proporzionalità tra la variazione punto per punto della pressione con la variazione punto per punto del potenziale gravitazionale: da questo si deduce che le superfici di fluido libero ad eguale pressione sono superfici equipotenziali, cioè delle sfere concentriche aventi come centro comune il centro della Terra

Nella dimostrazione di Archimede, la sfericità è dedotta facendo notare che se così non fosse, ci sarebbero porzioni di fluido "compresse in maniera diversa" e per il postulato iniziale ci sarebbe "movimento" dalla più compressa alla meno compressa



Grazie a tutti